Fonctions d'une Variable Complexe

* circa 1535 : Cardano & Ferrari introduisent les nombres-$\mathbb{C}$ comme racines des éq^{n}s du 2e degré dont $\Delta < 0$.
* Euler (1707-1783) effectue la première étude des fonc^{n}s d'une var.-$\mathbb{C}$.
* Lagrange (1736-1813) utilise le terme fonc^{n} analytique (pour les fonc^{n}s d'une var.-$\mathbb{R}$) pour désigner une fonc^{n} $f(x)$ développable en série entière de x dans le voisinage de chaque nombre où elle est définie.
* Gauss (1777-1855); Cauchy (1789-1857); Weierstrass (1815-1897); Riemann (1826-1866) & Poincaré (1854-1912) ont obtenu l'essentiel des résultats sur les fonctions holomorphes.

Soit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, un nombre-$\mathbb{C}$

Une fonc^{n} $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une applic^{n} de la forme

$$f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$$

où P & Q sont deux fonc^{n}s-$\mathbb{R}$ de deux var.-$\mathbb{R}$.

Une fonc^{n} $f(z)$ est <u>holomorphe au $\mathcal{V}(z_0)$</u> si elle est dérivable au voisinage de ce point.

Cette cond^{n} impose de forte restrictions aux fonctions $P(x,y)$ & $Q(x,y)$ (cond^{n}s/éq^{n}s de Cauchy-Riemann).

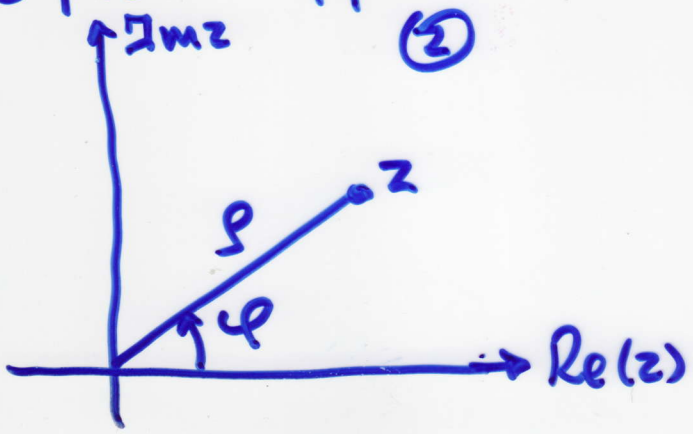
Les fonc^{n}s holomorphes d'une var.-$\mathbb{C}$ sont ∴ des cas particuliers de fonc^{n}s-$\mathbb{C}$, douées des propriétés très remarquables, qui feront l'objet de notre étude (par exemple, $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty$!)

Rappel de Propriétés Principales des Nombres-$\mathbb{C}$

$$z = \{x, y\} \quad \text{(couple ordonné)}$$

$$x := \mathcal{R}e(z) \; ; \; y := \mathcal{I}m(z)$$

∃ une bijection entre l'ens. de nombres-$\mathbb{C}$ & les points P du plan muni d'un repère orthonormé $\vec{Ox} \equiv$ axe réel ; $\vec{Oy} \equiv$ axe imaginaire. Le plan s'appelle alors le plan complexe $\mathbb{C}$.



$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} \rho &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \mathrm{Arg}\, z = \mathrm{Arctg}\,\tfrac{y}{x} \end{aligned}\right.$$

$\therefore$ $z = |z| e^{i \mathrm{Arg} z}$

L'argument de $z \equiv 0+i0$ n'est pas défini

" " " $z \neq 0$ est défini à $2n\pi$ près ($n \in \mathbb{Z}$)

* $\bar{z} := x - iy \equiv$ $\mathbb{C}$-conjugué de $z = x+iy$

$x = \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z}) = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $y = \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\bar{z}) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

* On appelle disque ouvert (fermé) de centre a & de rayon ρ, l'ensemble

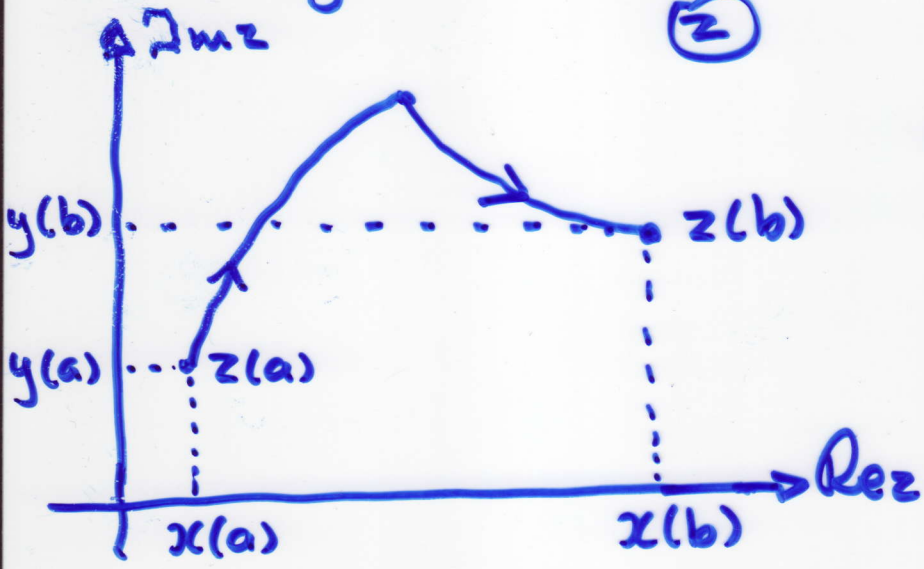
$$\overset{(-)}{D}(a,\rho) = \{ z \in \mathbb{C} : |z-a| \overset{(\leq)}{<} \rho \}$$

* Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ s'appelle un ouvert ssi $\forall z_0 \in A$, $\exists$ un disque ouvert $D(z_0, \rho) \subset A$.

* Ouvert connexe / domaine : Un ouvert $A \subset \mathbb{C}$ est connexe s'il n'est pas la réunion de deux ouverts $\neq \emptyset$ disjoints. Ceci $\Leftrightarrow$ à : Deux points quelconques de A peuvent être joints par un chemin continue entièrement contenu dans A.

* Chemin: Soient $x, y : I := [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applic^{ns} continûment dérivables par

morceaux ; i.e. I est la réunion d'un nombre fini d'intervalles disjoints dans lesquels $x(t)$ & $y(t)$ sont $\mathcal{C}^1$.



(z)

On appelle <u>chemin</u> dans $\mathbb{C}$ l'applic^{n} définie par :

$$z : I \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto z(t) = x(t) + iy(t)$$

$\forall t \in I$, $z(t)$ fait correspondre un pt. $\in \mathbb{C}$;

l'ens. de ces pts., $\forall t \in [a,b]$ est la trajectoire Γ de $z(t)$; le sens de parcours est indiqué par une flèche.

$z(a)$:= l'origine du chemin ;
$z(b)$:= l'extrémité du chemin

* Longueur d'un chemin :

A un accroissement ∞tésimal : $t \to t+dt$ correspondent les accroissements respectifs

$$x \to x + dx = x + x'(t)\,dt$$
$$y \to y + dy = y + y'(t)\,dt$$

La longueur de l'accroissement correspondant ds, sur la trajectoire est :

$$ds := \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2}$$
$$= |z'(t)|\,dt$$

où $z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.

On définit la longueur du chemin Γ par :

$$\boxed{\ell(\Gamma) := \int_a^b |z'(t)|\,dt}$$

* **Circuit :** Un chemin fermé, i.e. tel que $z(a) = z(b)$, est appelé un circuit. Si, en parcourant un circuit, on repasse deux fois (trois fois, ...) en un même pt. P, on dit que P est un point double (triple, ...) du circuit.

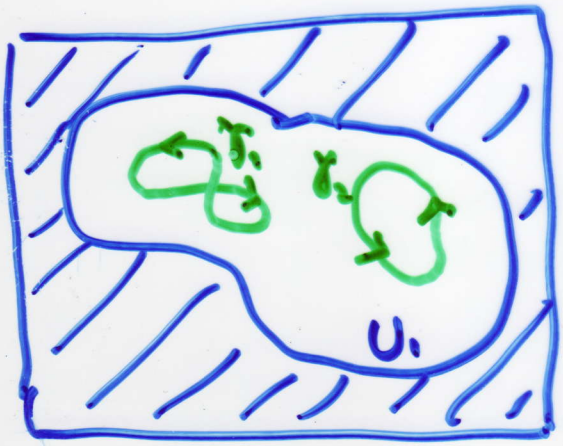
* **Courbe de Jordan :** Une courbe de Jordan est un circuit sans pt. double, parcouru une fois dans le sens direct.

* **Circuits homotopes dans un ouvert $A \subset \mathbb{C}$:**
Deux circuits γ_1 & γ_2 sont dits homotopes dans A si on peut passer de γ_1 à γ_2 sans sortir de A par une famille continue de courbes fermées. Un circuit est dit homotope à zero s'il est homotope à une trajectoire réduite à un point.

* Domaine simplement connexe:

Un ouvert $A \subset \mathbb{C}$ est simplement connexe si tout circuit de A est homotope à zéro.

Un domaine multiplement connexe est un domaine simplement connexe dont on a retiré un ou plusieurs domaines simplement connexes.





Les parties hachurées sont retirées des domaines.
Le domaine U_1 est simplement connexe.
" " U_2 " doublement " .
Le circuit γ_1 présente un point double.
" " γ_2 est une courbe de Jordan.
Les circuits γ_3 & γ_4 sont homotopes & chacun est homotope à zéro.
Les circuits γ_5 & γ_6 sont homotopes entre eux, mais ne sont pas homotopes à zéro.

Notions fondamentales (suite):

Définition: i) On dit que la fonction f tend vers une limite L quand $z \to z_0$, ce que l'on note $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ ssi

$$\lim_{z \to z_0} |f(z) - L| = 0$$

Plus précisément, $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $\forall z \in D(z_0, r)$, $z \neq z_0$;

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Rmques: 1) Si la limite existe, elle est unique.
2) La limite est indépendante du chemin que suit z dans $\mathbb{C}$, pour approcher z_0.

Exemple: $\lim_{z \to 0} f(z) := \lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x+iy}{x-iy}$

n'existe pas.

ii) On dit que la fonction f tend vers une limite L quand z tend vers l'infini si

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z) - L| = 0$$

iii) On dit que la fonction f est continue en z_0 si $f(z_0)$ existe, et si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

iv) On dit que la fonction f est dérivable au sens complexe en un point z_0 si le rapport

$$\frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u}$$

tend vers une limite quand $u \to 0$. Cette limite s'appelle la dérivée de f en z_0, et se note $f'(z_0)$.

Cette définition est équivalente à

$$f(z_0+u) = f(z_0) + u f'(z_0) + u\,\varepsilon(u) \qquad (1)$$

avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$

* Rmq: La propriété de dérivabilité au sens complexe impose des conditions sévères aux fonctions d'une variable complexe, conditions qui portent le nom de Cauchy-Riemann:

Définition et Théorème: La fonction

$$f = f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

est dérivable en z_0 ssi les fonctions P et Q sont différentiables en (x_0,y_0) et satisfont les conditions (ou équations) de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \;;\quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$

La dérivée $f'(z_0)$ s'exprime en fonction des dérivées partielles de $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ au point (x_0,y_0) par l'une des quatre formules:

$$(2)\quad f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{au } (x_0,y_0)$$

On peut alors introduire la notion d'une fonction holomorphe:

Définition: On dit qu'une fonction f de variable-$\mathbb{C}$ z est holomorphe dans un ouvert $A \subset \mathbb{C}$ ssi elle est dérivable au sens complexe $\forall z \in A$.

Remarques:

1) Supposons, de plus, que les fonctions $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ admettent des dérivées partielles secondes continues dans un ouvert $A \subset \mathbb{C}$. Conditions de C-R $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) P(x,y) = \Delta P(x,y) = 0$$

De la même façon, on trouve

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) Q(x,y) = \Delta Q(x,y) = 0$$

Les fonctions P et Q satisfont donc <u>l'équation de Laplace</u>; elles sont dites <u>harmoniques</u> dans A.

2) On vérifie facilement que les dérivées au sens complexe se calcule comme si z était réel.

<u>Exemples:</u> i) Si f et g dérivables, alors

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \; ; \; (f \cdot g)' = f'g + fg' ;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (g(z) \neq 0 \; \forall z \in A)$$

ii) Si $Z = f(z)$ est dérivable en z_0 et si ses valeurs appartiennent à un domaine U où une fonc^n $F(Z)$ est dérivable, alors la fonction composée $(F \circ f)(z) = F(f(z))$ est dérivable par rapport à z en z_0:

$$\frac{d}{dz} F(f(z))\Big|_{z=z_0} = f'(z_0) F'(Z_0) \qquad (\text{où } Z_0 = f(z_0))$$

iii) $f(z) = z^n$ est dérivable en tout point, et

$$f'(z) = n z^{n-1}.$$

Exemples de fonctions holomorphes:

Séries Entières

Définition: On appelle série entière de centre z_0 et de coefficients a_n, où $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, une série de la forme

$$(3) \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z-z_0)^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

Soit $A \subset \mathbb{C}$. On dit que la série complexe (3) converge absolument sur A ssi la série entière réelle

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \, |z-z_0|^n,$$

appelée série des modules, est cvgte $\forall z \in A$. Si la série est à la fois absolument et uniformément cvgte dans un ouvert $A \subset \mathbb{C}$, on dit qu'elle converge normalement.

Rappelons les propriétés de cvgce des séries entières:

Théorème: i) $\exists R \in \mathbb{R}_+^*$ (éventuellement 0 ou ∞), tq la série (3) cvge abst. dans le disque ouvert $D(z_0, R)$ et diverge à l'extérieur du disque fermé $\overline{D}(z_0, R)$. R et $D(z_0, R)$ (qui est éventuellement $\emptyset$ ou égal à $\mathbb{C}$) s'appellent respectivement le rayon de cvgce et le disque de cvgce de cette série.

ii) La série cvge normalement dans tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$, $r < R$.

Pour calculer R, on utilisera les règles de Cauchy, ou de d'Alembert, etc.

On se propose maintenant de montrer que, $\forall z \in D(z_0, R)$, la somme d'une série entière définit une <u>fonction holomorphe</u>:

<u>Théorème :</u>
(i) Une série entière et la série obtenue en la dérivant terme à terme ont le même rayon de convergence.
(ii) La somme $f(z)$ de la série entière est une fonction dérivable à l'intérieur de son disque de cvgce. Sa dérivée $f'(z)$ est la somme de la série entière obtenue en la dérivant terme à terme.

<u>Rmq:</u> Ce théorème est très important car il s'agit non seulement de f' mais de <u>toutes</u> les dérivées d'ordre supérieur:

<u>Corollaire:</u> Toutes les dérivées d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$, d'une série entière

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

existent pour z dans le disque de cvgce, et

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n z^{n-k}$$

$$= \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$$

<u>Démonstration:</u> Faire une récurrence sur k. ▨

<u>Rmq:</u> En remplaçant z par $z - z_0$ dans ce Corollaire, nous constatons que si la série

entière $f(z) = \sum_n a_n (z-z_0)^n$ a un disque de cvgce $D(z_0, R)$, alors toutes les dérivées d'ordre supérieur de f existent à l'intérieur de ce disque, et

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}.$$

En mettant $z = z_0$ dans cette série, nous obtenons

$$f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!$$

qui conduit à un autre corollaire important:

<u>Corollaire:</u> Si $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z-z_0)^n$ $\forall z$ tq $|z-z_0| < R$, alors

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0),$$

et f peut être représentée par une <u>série de Taylor</u>:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \qquad (|z-z_0| < R).$$

Les fonctions entières:

<u>Définition:</u> Une <u>fonction entière</u> est une fonction analytique / holomorphe sur tout le plan complexe.

<u>Exemple 1:</u> Les polynômes $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

$P_n(z)$ est un cas particulier de série entière, avec $R = \infty$. Donc P_n est une fonction entière.

<u>Exemple 2:</u> La fonction exponentielle $f(z) = e^z$:

Démonstration : (du Thm, p. 10a)

i) Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, la série convergeant absolument pour $|z| < R$, où $R \equiv$ le rayon de cvgce. Nous voulons montrer que la série

$$g(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$$

est cvgte pour $|z| < R$. Choisissons $r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $|z| < r < R$. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ cvge absolument, & donc $\exists K \in \mathbb{R}_+^*$ tq

$$|a_n r^n| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or, $q := \frac{|z|}{r} < 1$, donc $|n a_n z^{n-1}| = n|a_n| \left|\frac{z}{r}\right|^{n-1} r^{n-1}$

$$< n \frac{K}{r} q^{n-1}$$

Mais $\forall q \in [0,1[$ la série réelle $\sum_{n\geq 1} nKq^{n-1}$ converge ver $\frac{K}{(1-q)^2}$. Par le test de comparaison $\sum_n |n a_n z^{n-1}|$ cvge; & donc la série $\sum_n n a_n z^{n-1}$ est cvgte, avec $R =$ le rayon de cvgce.

ii) Nous venons de démontrer que

$$g(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$$

est abs^t cvgte $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < R$. Nous devons montrer que poor $|z_0| < R$,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right\} = g(z_0)$$

ou, d'une façon équivalente:

$$\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-g(z_0)\right]=0$$

Or,

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-g(z_0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}-n a_n z_0^{n-1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\left\{z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+z_0^{n-1}-n z_0^{n-1}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}a_n\{\cdots\}+\sum_{n\geq N+1}a_n\{\cdots\}\equiv\sum_1+\sum_2$$

Etant donné un $\varepsilon>0$ qqe, choisissons $r\in\mathbb{R}_+^*$ tq $|z_0|<r<R$. Alors $\sum n a_n r^{n-1}$ est cvgte, & $\exists N=N(\varepsilon)$ tq

$$\sum_{n\geq N+1}|n a_n r^{n-1}|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Puisque $|z_0|<r$, si z est suffisamment proche de z_0 tq $|z|<r$ aussi, alors

$$\left|\sum_2\right|\leq\sum_{n\geq N+1}2n|a_n|r^{n-1}<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(*)$$

De plus, puisque $\sum_1$ est un polynômial en z, alors $\sum_1\to 0$ quand $z\to z_0$: On peut alors trouver $\delta>0$ tq

$$|z-z_0|<\delta\Rightarrow\left|\sum_1\right|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(**)$$

En choisissant z suffisamment proche de z_0 pour se rassurer que $(*)$ et $(**)$ soient vraies, il vient:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-g(z_0)\right|=\left|\sum_1+\sum_2\right|\leq\left|\sum_1\right|+\left|\sum_2\right|<\varepsilon$$

et on a donc

$$f'(z_0)=g(z_0).$$

∎

Fonction exponentielle complexe

$$\forall z \in \mathbb{C}: \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

• $\exp(z)$ est une fonction <u>entière</u>, possédant les propriétés suivantes:

(i) $\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$.

(ii) $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(iii) Si $\theta \in \mathbb{R}$, alors
$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

Démonstration de (ii): Soit $\xi \in \mathbb{C}$ qqe fixe. On définit $g(z)$ par:
$$g(z) := \exp(z)\exp(\xi - z)$$
Alors: $g'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Donc $g(z) = g(0) \; \forall z$, i.e. $g(0) = \exp(\xi)$, ce qui donne
$$\exp(\xi) = \exp(z)\exp(\xi - z).$$
Il suffit de mettre $z = z_1$, et $\xi = z_1 + z_2$.

<u>Exercice:</u> Etablir (i) et (iii).

(iv) $\exp(z + i2n\pi) = \exp(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}$

(v) $\exp(z) = 1$ ssi $z = i2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

(vi) $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ ssi $z_2 = z_1 + i2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Etudions le module et l'argument de la fonction $f(z) = w = \exp(z) = \rho \exp(i\phi)$. Si $z = x + iy$, alors

$$\rho \exp(i\phi) = \exp(x)\exp(iy)$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho = \exp(x), \text{ et } \phi = y + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Donc: $\rho = |\exp(z)| = \exp(x)$

$\phi = \operatorname{Arg} \exp(z) = \arg \exp(z) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

$(1) \Leftrightarrow x = \ln \rho$, et $y = \phi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, $\forall w \in \mathbb{C}^*$, $\exists$ une ∞té de nombres complexes $z = x + iy$ tq $w = \exp(z)$, donnés par:

$$z = x + iy = \ln \rho + i(\phi + 2n\pi)$$

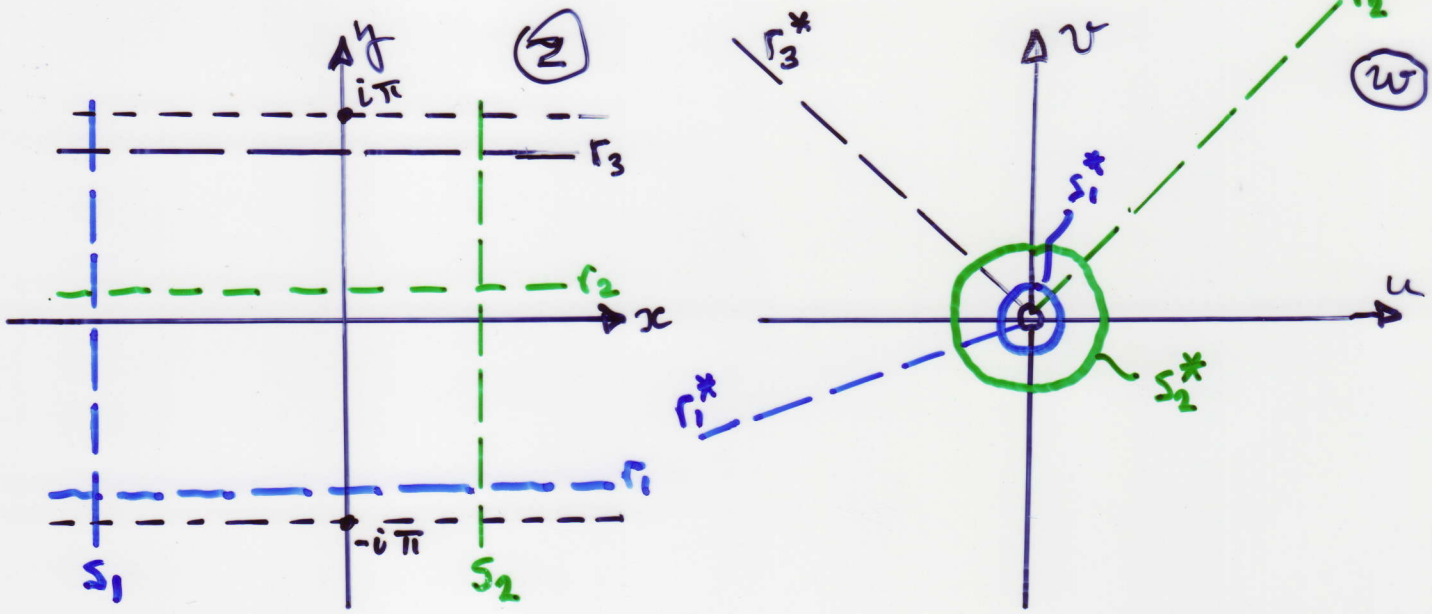
$$(2) \qquad = \ln|w| + i(\arg w + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Donc $\exp(z) = \exp[\ln|w| + i(\arg w + 2n\pi)] = w$, et l'on peut déduire que l'application

$$(3) \qquad f : z \longmapsto w = \exp(z)$$

projète (une ∞té de fois!) le plan complexe $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$.

Si nous limitons les solutions dans (2) à celle où $\arg(w) \in]-\pi, +\pi[$, alors (3) est une applic^n bijective de la bande horizontale $]-\pi, +\pi[$ sur $\mathbb{C}^*$:



Fonction logarithme complexe

Nous voulons définir la fonc^{n} log. dans $\mathbb{C}$ de telle façon qu'elle soit $= \log x$, quand $z = x \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans le cas réel, nous savons que log est la réciproque de la fonc^{n} exp^{lle}. Dans le cas complexe, il faut faire attention: Lorsqu'on fait varier z dans $\mathbb{C}$, la fonc^{n} $\exp(z)$ étant périodique (de période $i2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$), on a vu qu'elle n'aura pas une fonc^{n} réciproque unique.

De plus, puisque exp ne s'annule jamais, on ne pourra pas définir log au pt. 0.

Voici alors une solution pour surmonter ces obstacles:

Proposition 1: Soit $A_\alpha := \{z = x+iy \in \mathbb{C} : y \in]\alpha, \alpha+2\pi[\}$. Alors $\exp(z)$ est une bijection de A_α sur $\mathbb{C}^*$.

Démonstration: $\forall z_1, z_2 \in A_\alpha$, si $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, alors $\exp(z_1 - z_2) = 1$; donc $z_1 - z_2 = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. Mais puisque $z_1, z_2 \in A_\alpha$, la différence de leur partie imaginaire ne peut pas dépasser 2π. On a donc $n=0$ et $z_1 = z_2$. L'applic^{n} est donc injective.

Soit maintenant $w \in \mathbb{C}^*$. Nous voulons montrer que $\exp(z) = w$ a une sol^{n} unique dans A_α. Or, cette éq^{n} peut s'écrire comme:

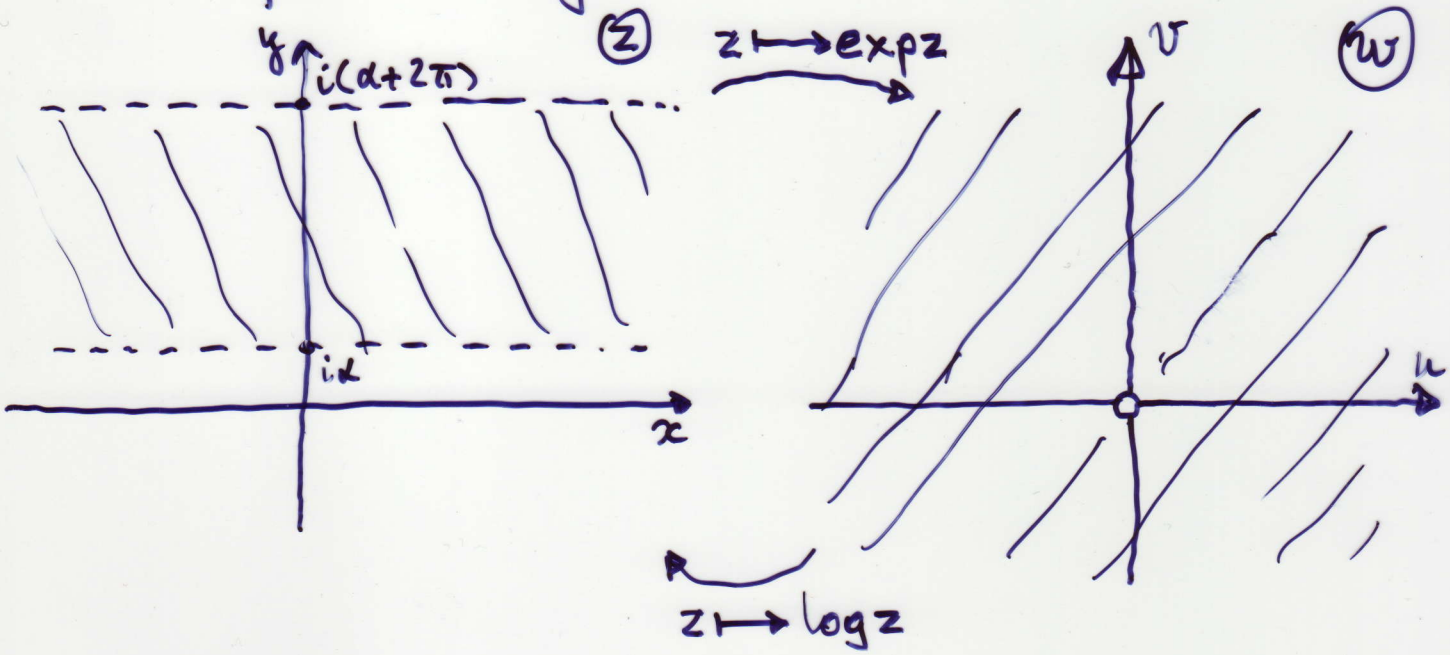
$$\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) = w$$

$$\Rightarrow |w| = \exp(x); \quad \exp(iy) = \frac{w}{|w|} \quad (*)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \log|w|$$

tandis que (*) a une infinité (dénombrable) de solutions en y, chacune se distinguant des autres par un facteur additif $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais il n'y a qu'une seule sol^{n} qui peut se trouver dans l'intervalle $]\alpha, \alpha+2\pi[$. Ce y est $\arg(w)$ où l'image de la fonc^{n} arg est $]\alpha, \alpha+2\pi[$. Donc exp est surjective sur $\mathbb{C}^*$. ∎



Nous venons de trouver une expression explicite pour la réciproque de $\exp(z)$, restreinte au domaine $]\alpha, \alpha+2\pi[$. Nous la définissons formellement:

<u>Définition:</u> La fonction $\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Im}(\log z) \in]\alpha, \alpha+2\pi[$, est définie par

$$\log z = \log|z| + i\arg(z)$$

où $\arg(z)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $]\alpha, \alpha+2\pi[$, et $\log|z|$ est la fonction logarithme habituelle du nombre réel $|z|$.

Cette fonction s'appellera la <u>détermination</u> de la fonction logarithme dans Π_α.

Rmq: La fonction $\log z$ n'est bien définie que lorsque nous précisons sa détermination (i.e. l'intervalle de longueur 2π dans lequel $\arg z$ prend ses valeurs).

Exemple: Considérons $\log(1+i)$ avec la détermination A_0, i.e. $\arg z \in]0, 2\pi[$:

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

Si nous faisons le calcul pour A_π (i.e. $\arg z \in]\pi, 3\pi[$), alors

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{9\pi}{4}$$

$$= \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + i2\pi$$

$i2\pi$ représente le saut en passant de A_0 à A_π.

Proposition: La fonction $\log$ est la réciproque de $\exp$ dans le sens que pour toute détermination de $\log$, nous avons

$$e^{\log z} = z,$$

et si nous choisissons la détermination dans A_α, alors

$$\log(e^z) = z \quad \text{pour } z = x+iy \text{ \& } y \in]\alpha, \alpha+2\pi[.$$

Démonstration: Puisque $\log z = \log|z| + i\arg z$, on a

$$e^{\log z} = e^{\log|z|} e^{i\arg z} = |z| e^{i\arg z} = z.$$

Réciproquement, supposons que $z = x+iy$, avec $y \in]\alpha, \alpha+2\pi[$. Par définition:

$$\log(e^z) = \log|e^z| + i\arg(e^z)$$

Or, $|e^z| = e^x$ et $\arg(e^z) = y$

par notre choix de détermination. Donc:

$$\log(e^z) = \log(e^x) + iy$$
$$= x + iy = z. \quad \blacksquare$$

Proposition: Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2 + i2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Démonstration: Par définition:

$$\log(z_1 z_2) = \log|z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2)$$

avec A_α comme détermination. Or,

$$\log|z_1 z_2| = \log(|z_1| \cdot |z_2|) = \log|z_1| + \log|z_2|$$

et $$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Donc:

$$\log(z_1 z_2) = \log|z_1| + i\arg z_1 + \log|z_2| + i\arg z_2 + i2n\pi$$
$$= \log z_1 + \log z_2 + i2n\pi. \quad \blacksquare$$

Exemple: Calculons $\log[(-1-i)(1-i)]$ avec le choix de détermination

$$A_0 = \{z \in \mathbb{C} : y \in]0, 2\pi[\}.$$

Or, $\log[(-1-i)(1-i)] = \log(-2) = \log 2 + i\pi$.

En revanche $\log(-1-i) = \log\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$

et $\log(1-i) = \log\sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4}$

Donc: $\log(-1-i)+\log(1-i) = 2\log\sqrt{2} + i\,3\pi$

et finalement

$$\log[(-1-i)(1-i)] = \log(-1-i)+\log(1-i) - i2\pi.$$

* Considérons maintenant le pb. de dérivabilité de $\log z$: Nous serons obligés de restreindre le domaine de déf^{n} de $\log z$, i.e. $\mathbb{C}^*$, à un sous-ens. La raison est la suivante: Soit

$$\log z = \log|z| + i\arg z,$$

avec, par exemple, la détermination A_0. Mais la fonction arg n'est pas continue: elle fait un saut de 2π lorsqu'on traverse l'axe réel positif. Si nous excluons ces points, alors nous ne pourrons plus identifier $\log z$ lorsque z est restreint aux nombres réels positifs avec la fonction logarithme réelle. Donc, on convient de prendre comme détermination $\arg z \in]-\pi, +\pi[$. Nous avons alors:

* <u>Proposition</u>: Soit $A_{-\pi} := \{z \in \mathbb{C} \mid x<0,\ y=0\}$. On définit une détermination du log sur $A_{-\pi}$ par:

$$\log z = \log|z| + i\arg z, \qquad \arg z \in]-\pi, +\pi[$$

qui s'appelle la <u>détermination principale du logarithme</u>. Alors $\log z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus A_{-\pi}$, avec

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}.$$

<u>Démonstration</u>: On utilisera les équations de Cauchy-Riemann sous forme polaire:

Soit $z = r\exp(i\theta)$, $r>0$, $\theta \in]-\pi, +\pi[$.

$$\log z = \log r + i\theta$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = \log r, \quad v(r,\theta) = \theta$$

qui sont $\mathcal{C}^\infty$ en r et θ. Les équations de Cauchy-Riemann peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

donc elles sont vérifiées. On a alors:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\log z &= \frac{\partial}{\partial x}(\log r + i\theta) \\ &= \frac{d}{dr}\log r \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{r}\cdot\frac{x}{r} - i\frac{y}{r^2} = \frac{x-iy}{r^2} \\ &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

La fonction $z^s = e^{s\ln z}$, $s \in \mathbb{C}$

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $x^n = \left(e^{\ln x}\right)^n = e^{n\ln x}$.

Par analogie, la fonc^{n} $e^{s\ln z}$, $s \in \mathbb{C}$, sera notée z^s.

Si, pour z donné, A est une des valeurs de $\ln z$, l'ens. des valeurs de $\ln z$ est donné par

$$\ln z = A + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, l'ens. des valeurs de $e^{s\ln z}$ est:

$$z^s = e^{sA}\cdot e^{i2k\pi s}.$$

Si $s = n \in \mathbb{Z}$, z^n n'est pas une fonction multiforme. Elle est entière $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour $n<0$, z^n est une fonc^{n} méromorphe, ayant en $z=0$ un pôle d'ordre n.

Si $s = \pm\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors

$$z^s = e^{\pm\frac{p}{q}A}\, e^{\pm i2k\pi\cdot\frac{p}{q}} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

Le facteur $\exp(\pm i2k\pi\frac{p}{q})$ prend, pour $k\in\mathbb{Z}$, q et seulement q valeurs différentes. Donc, z^s est une fonction multiforme si $q\neq 1$, présentant un nombre fini (= à q) de déterminations.

Pour toute autre valeur de s, soit s réel et irrationnel et soit $s\in\mathbb{C}$, la fonc^n z^s est une fonction multiforme, ayant une infinité de déterminations.

Il suffit, pour définir z^s et que cette fonc^n soit holomorphe dans un ouvert $\mathcal{O}\subset\mathbb{C}$, que la fonc^n $\ln z$ soit définie & holomorphe. Cela sera réalisé si $z\in\mathbb{C}_\alpha$, avec $\operatorname{Arg} z\in\,]\alpha,\alpha+2\pi[$. On a alors

$$\frac{d}{dz}z^s = \frac{d}{dz}e^{s\ln z} = \frac{d}{dz}(s\ln z)\,e^{s\ln z} = \frac{s}{z}e^{s\ln z} = sz^{s-1}.$$

On définit la détermination principale de z^s, dans le plan coupé $\mathbb{C}_{-\pi}$, par

$$e^{s\ln z} = e^{s\ln|z|}\, e^{is\operatorname{Arg} z} = |z|^s\, e^{is\operatorname{Arg} z},$$

avec $\operatorname{Arg} z\in\,]-\pi,+\pi[$.

En résumé, excepté le cas particulier où $s\in\mathbb{Z}$, z^s est une fonction multiforme, ayant $z=0$ comme point de branchement; chacune de ses déterminations est holomorphe dans $\mathbb{C}_\alpha$.

Exemple 1: $i^{2i} = e^{2i\ln i} = e^{2i\{\ln|i| + i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\}}$

$$= e^{-(4n+1)\pi}$$

Exemple 2: $(1+i)^i = e^{-\frac{(8n+1)\pi}{4}}\, e^{i\frac{\ln 2}{2}}$.

Intégration des fonctions holomorphes:

Soit Γ un chemin dans $\mathbb{C}$, défini par
$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Soit $f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$ (*)
une fonction à valeurs complexes définie et continue sur Γ.

D'après les conditions de régularité imposées à $x(t)$ et $y(t)$ (i.e., $\mathcal{C}^1$ par morceaux), la fonction
$$[P(x(t),y(t)) + iQ(x(t),y(t))][x'(t) + iy'(t)]$$
est continue par morceaux par rapport à t, & donc intégrable sur $[a,b]$.

Définition: On appelle intégrale de $f(z)$ (*), le long du chemin Γ, le nombre complexe

$$(1) \quad \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b [P(x(t),y(t)) + iQ(x(t),y(t))][x'(t) + iy'(t)]\,dt$$

Si $f(z)$ est holomorphe dans un ouvert A contenant Γ, nous écrirons (1) sous la forme:
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Rmqs: 1) Si on change le sens du parcours sur le chemin Γ, on doit remplacer
$$\int_a^b \text{ par } \int_b^a \text{ et l'intégrale (1) change de signe.}$$

2) On utilisera la notation $\oint_\Gamma f(z)\,dz$ pour représenter l'intégrale de f sur une courbe de Jordan, parcourue dans le sens direct.

Exemple: Soit la fonc^{n} $f(z)=z^n$, $n\in\mathbb{N}$. Soit le chemin $z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$, d'origine $z(a)$ et d'extrémité $z(b)$.

$$\int_\Gamma z^n dz = \int_a^b [x(t)+iy(t)]^n [x'(t)+iy'(t)]\,dt$$

En intégrant par parties:

$$\int_\Gamma z^n dz = [x(t)+iy(t)]^{n+1}\Big|_a^b - n\int_a^b [x(t)+iy(t)]^n [x'(t)+iy'(t)]\,dt$$

$$= z^{n+1}(b) - z^{n+1}(a) - n\int_\Gamma z^n dz$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma z^n dz = \frac{1}{n+1}\left[z^{n+1}(b) - z^{n+1}(a)\right].$$

On remarque que le résultat ne dépend que de l'origine & de l'extrémité de Γ. Par conséquent, l'intégrale de z^n sur tout circuit est nulle:

$$\oint_\Gamma z^n dz = 0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Lemme de Majoration: Soit $f(z)$ analytique dans un domaine contenant le chemin Γ, de longueur $\ell(\Gamma)$. Soit $M := \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|$. Alors:

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le M\,\ell(\Gamma)$$

Démonstration: $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\right|$

$$\le \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt \le M\int_a^b |z'(t)|\,dt = M\,\ell(\Gamma). \quad \blacksquare$$

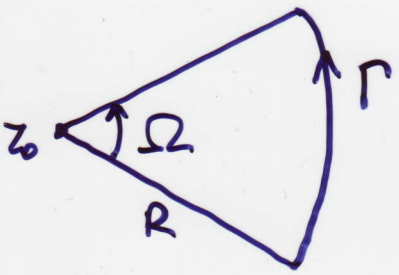
Ce lemme, qui permet de majorer en module une intégrale le long d'un chemin Γ, conduit à une application fondamentale, appelée le:

* **Lemme de Jordan:** Soit Γ un arc de cercle de centre z_0, de rayon R, d'angle au centre Ω exprimé en radians $\Omega \in]0, 2\pi]$.

Si
$$\lim_{\substack{R\to 0 \\ (\infty)}} \sup_{z\in\Gamma} |z f(z)| = 0 \qquad (2)$$

alors
$$\lim_{\substack{R\to 0 \\ (\infty)}} \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Démonstration: On a $l(\Gamma) = \Omega R$. Conformément au lemme de majoration:



$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|\, \Omega R$$

$$= \sup_{z\in\Gamma} |z f(z)|\, \Omega$$

On en déduit immédiatement le résultat. ▨

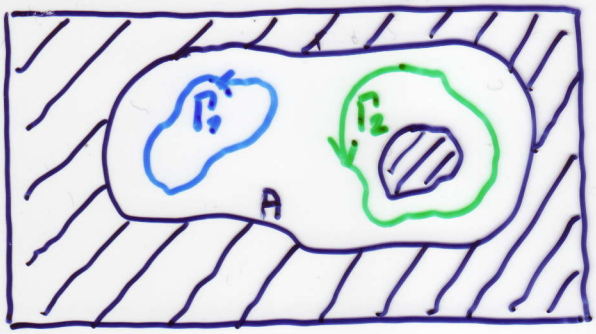
Rmq: Le lemme de Jordan ne donne que des conditions suffisantes; cette limite peut donc être nulle même si (2) n'est pas satisfaite.

Le résultat suivant exprime une propriété fondamentale des fonctions analytiques:

* **Théorème de Cauchy:** Soit f une fonction analytique dans un ouvert A simplement connexe. Alors, $\forall$ circuit $\Gamma \subset A$, on a

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0. \qquad (3)$$

Remarque: Pour la validité du théorème de Cauchy l'hypothèse que $f(z)$ est analytique en tout point intérieur à Γ et sur Γ est nécessaire. En conséquence, pour que (3) soit vraie $\forall$ circuit Γ intérieur à A où $f(z)$ est analytique, il est nécessaire que A soit simplement connexe.



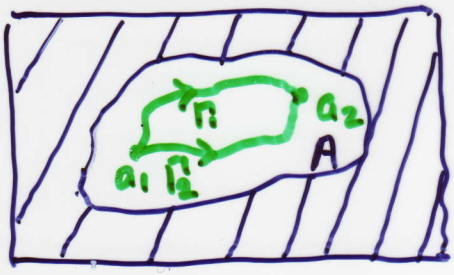
Dans l'ouvert A doublement connexe, la formule (3) s'applique au circuit Γ_1 contenu dans un ouvert simplement connexe où $f(z)$ est analytique, mais elle ne s'applique pas à Γ_2.

Conséquences immédiates du théorème de Cauchy:

1) Indépendance du trajet: Soit f une fonct^{n} holomorphe dans un ouvert A simplement connexe. Soient a_1 et a_2 deux pts. de A, Γ_1 et Γ_2 deux chemins d'origine a_1, d'extrémité a_2, entièrement contenus dans A. Alors:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \qquad (4)$$

Démonstration:



Soit $\overline{\Gamma_2}$ le chemin Γ_2 parcouru dans le sens $a_2 \to a_1$.
D'une part

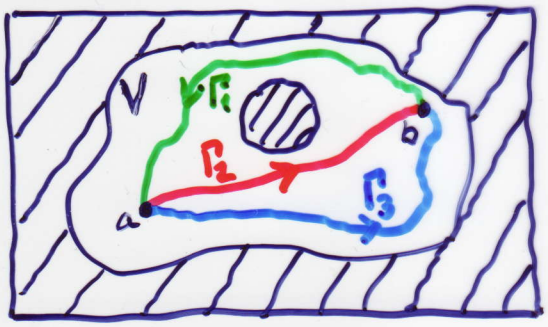
$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = -\int_{\overline{\Gamma_2}} f(z)\,dz,$$

et d'autre part $\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_2}$ est un circuit auquel on peut appliquer le Thm. de Cauchy:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\overline{\Gamma_2}} f(z)\,dz = 0. \qquad \blacksquare$$

2) Fonction primitive: Dans un ouvert simplement connexe, toute fonction holomorphe admet une primitive.

Remarque: Il est nécessaire que l'ouvert soit simplement connexe dans l'hypothèse. En effet, considérons une fonction f holomorphe dans un ouvert qui n'est pas simplement connexe, comme l'ouvert V, doublement connexe, de la figure ci-dessous:



Thm. de Cauchy $\Rightarrow$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz$$

(Puisque Γ_2 & Γ_3 sont entièrement contenus dans un ouvert simplement connexe où f est holomorphe).

Cependant, le thm. de Cauchy ne dit rien sur les valeurs comparées des intégrales sur Γ_1 et Γ_2 (ou Γ_3) qui peuvent être différentes. Si elles le sont, alors la fonct^{n}

$$\int_a^z f(\xi)\,d\xi$$

n'est pas définie, et f n'admet pas de primitive dans V.

Soit donc f holomorphe dans un ouvert V simplement connexe, et F sa primitive définie par:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi \qquad (z_0, z, \xi \in V\,;\ z_0 \text{ fixe})$$

Soient $a, b \in V$. On a:

$$(5)\qquad \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^{z_0} f(z)\,dz + \int_{z_0}^b f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

Donc, si on connait une primitive F de f, alors on peut calculer

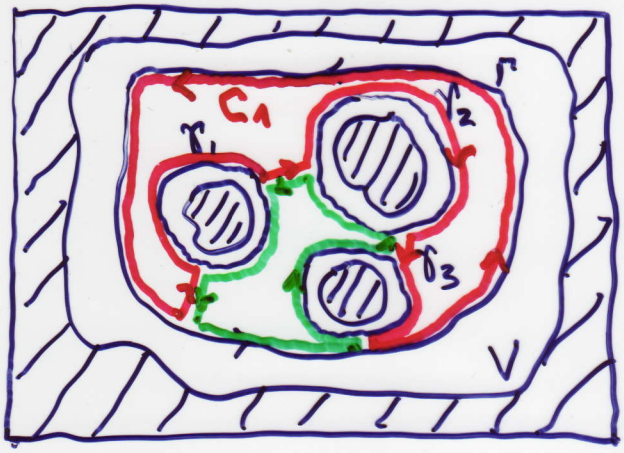
$$\int_a^b f(z)\,dz$$

par la formule (5), sans avoir recours à la représentation paramétrique d'un chemin joignant a à b.

Lemme: Soient Γ une courbe de Jordan et $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ un ensemble de courbes de Jordan intérieures à Γ et sans points communs. Soit V le domaine multiplement connexe formé d'un ouvert simplement connexe contenant Γ, privé de domaines simplement connexes intérieurs aux courbes $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Soit $f(z)$ analytique dans V. Alors

$$(6) \qquad \oint_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

Démonstration:



Considérons les courbes de Jordan C_1 et C_2.
f est holomorphe dans un ouvert simplement connexe contenant C_1 et C_2. D'après le théorème de Cauchy:

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = 0 = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

On vérifiera sur la figure que

$$0 = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz = \oint_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{i=1}^{k} \oint_{\gamma_i} f(z)\,dz. \qquad \blacksquare$$

Remarque: L'ensemble des courbes $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ peut être considéré comme la frontière d'un domaine multiplement connexe contenu dans V. Si l'on convient de définir cette frontière $F = \{\Gamma, \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_k\}$ en orientant la courbe extérieure Γ dans le sens direct & les courbes intérieures dans le sens rétrograde, la formule (6) s'écrit:

$$\oint_F f(z)dz = 0.$$

On peut alors reformuler le Lemme précédent comme une généralisation du théorème de Cauchy:

Théorème de Cauchy généralisée: Soit F la frontière, orientée comme il est précisé ci-dessus d'un domaine multiplement connexe contenu dans l'ouvert V où f est holomorphe. Alors:

$$\oint_F f(z)dz = 0.$$

Les formules intégrales de Cauchy

Notre but est de montrer qu'une fonc^{n} holomorphe, définie comme une fonc^{n} dérivable dans un ouvert $A \subset \mathbb{C}$, est $\mathcal{C}^\infty$ en tt pt. de cet ouvert. On peut démontrer cette propriété en utilisant les formules intégrales de Cauchy:

Théorème: Soit $f(z)$ holomorphe dans un ouvert A simplement connexe. Alors, pour tte courbe de Jordan $\Gamma \subset A$ et $z_0 \in \text{int}(\Gamma)$, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \qquad (7)$$

Remarque: La formule (7) de l'intégrale de Cauchy révèle une propriété remarquable des fonctions holomorphes:

* Les valeurs d'une fonction holomorphe $f(z)$ à l'intérieur d'un circuit sont déterminées par les valeurs prises par $f(z)$ sur le circuit.

Une fonction f holomorphe dans un ouvert A est dérivable au sens complexe $\forall z \in A$. Le résultat suivant montre que cette propriété $\Rightarrow f(z)$ est $\mathcal{C}^\infty$ $\forall z \in A$:

Théorème: (Une fonction holomorphe dans un ouvert A est indéfiniment dérivable $\forall z \in A$) Si $f(z)$ est holomorphe dans un ouvert A simplement connexe, alors, pour toute courbe de Jordan $\Gamma \subset A$, et $z_0 \in \text{int}\,\Gamma$, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

On retrouve ainsi la conséquence remarquable de la déf^n de la dérivée au sens complexe: $f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty$!

Applications des formules intégrales de Cauchy:

1) Théorème de Liouville: Une fonction entière et bornée est une constante. (Exo: Prouver)

2) Théorème de d'Alembert: Un polynôme $P_n(z)$, de degré n, a n racines. (Exo: Prouver).

Les zéros d'une fonction holomorphe

Définition: Soit f holomorphe dans un voisinage du point z_0. On dit que z_0 est un zéro d'ordre n de f si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n)}(z_0) = 0, \text{ et } f^{(n+1)}(z_0) \neq 0.$$

Nous avons déjà vu la représentation de f par une série de Taylor au voisinage $\mathcal{V}(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R)$$

Or, le nombre $z = z_0$ est un zéro d'ordre n de $f(z)$ ssi le rapport

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^n}$$

tend vers une limite finie $\neq 0$ quand $z \to z_0$.

Principe des zéros isolés: Si z_0 est un zéro d'une fonction holomorphe $f(z)$, qui n'est pas $\equiv 0$, alors $\exists$ un disque pointé:

$$\dot{D}(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r \}$$

à l'intérieur duquel $f(z) \neq 0$. On dit que les zéros d'une fonction holomorphe sont des points isolés.

Série de Laurent / Résidus

Nous avons vu que le développement de Taylor d'une fonct^{n} f est un développ^{t} en série

entière dont le centre est un point au voisinage duquel $f(z)$ est analytique.

Le développement de Laurent, en revanche, est un développement en puissances +ves et -ves, de $z-\alpha$, où α est, éventuellement, une singularité isolée de $f(z)$.

Définition: On appelle couronne ouverte de centre z_0 et de rayons R_1 et R_2 l'ensemble

$$S(z_0, R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

Le cas particulier où $R_1 = 0$, $R_2 = R$, est appelé le disque pointé:

$$\dot{D}(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\},$$

qui est le disque $D(z_0, R)$ privé de son centre.

Remarque: Couronne & disque pointé sont des ouverts doublement connexes.

Théorème: Soit $f(z)$ holomorphe dans la couronne ouverte $S(z_0, R_1, R_2)$. Elle admet, dans chaque point z de cette couronne, un développement unique appelé série de Laurent, de la forme

$$(8) \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

où $\Gamma \subset S(z_0, R_1, R_2)$ est une courbe de Jordan.

Remarques:

1) Le développement en série de Laurent n'est pas un développement en série entière, car il peut contenir des puissances -ves de $(z-z_0)$.

2) Supposons, ce qui n'est pas exclu par les hypothèses du théorème précédent, que la fonc^{n} $f(z)$ soit holomorphe dans l'ouvert simplement connexe $D(z_0, R_2)$.

Alors, dans ce cas, mais dans ce cas seulement, la formule intégrale de Cauchy est applicable pour calculer a_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

D'autre part, pour $n \leq -1$, la fonction $(z-z_0)^{-(n+1)} f(z)$ est holomorphe dans $D(z_0, R_2)$ puisque $n+1 \leq 0$. Le théorème de Cauchy permet alors d'affirmer que $a_n \equiv 0$ si $n \leq -1$. Le développement de Laurent est donc identique, dans ce cas particulier, au développement de Taylor.

Singularités Isolées: Pôles & Points Singuliers Essentiels

On dit que le pt. $z=z_0$ est une singularité de f si f n'est pas dérivable dans le $\mathcal{V}(z_0)$.

S'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tq f soit holomorphe dans le disque pointé $D(z_0, R)$, on dit que $z=z_0$ est une singularité isolée de f.

Soit f une fonction holomorphe dans le disque pointé $D(z_0, R)$. Alors le point $z=z_0$ est:

- soit un point régulier,
- soit une singularité isolée

} de f.

Le disque pointé étant un cas particulier de la couronne ouverte $S(z_0, r, R)$, $r<R$, la formule (8), où Γ est une courbe de Jordan contenue dans $D(z_0, R)$, est valable $\forall z \in D(z_0, R)$.

La structure du développement en série de Laurent est alors caractéristique de la nature du point $z=z_0$. Trois cas sont possibles:

1) $\underline{\forall n<0,\ a_n \equiv 0}$: Le développement de Laurent est alors identique au développement de Taylor et cela correspond au cas où $z=z_0$ est un <u>point régulier</u>, i.e. f est holomorphe dans $D(z_0, R)$.

2) <u>Un nombre fini de coeff^{ts} a_n, $n<0$, sont différents de zéro</u>, & $\exists N \in \mathbb{N}^*$: $a_n = 0$ $\forall n \leq -N-1$, et $a_{-N} \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_{-N} \neq 0. \tag{9}$$

On dit alors que $z=z_0$ est un pôle d'ordre N de f. Il résulte immédiatement de (9) que

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^N f(z) = a_{-N} \neq 0,$$

propriété qui fournit une définition équivalente d'un pôle d'ordre N:

<u>Définition:</u> On dit que z_0 est un <u>pôle d'ordre N</u> de f si $(z-z_0)^N f(z)$ tend vers une limite finie $\neq 0$ quant $z \to z_0$, ou, ce qui est équivalent, si z_0 est un zéro d'ordre N de $1/f(z)$.

Les coefficients a_n du développement (9)

de Laurent autour d'un pôle d'ordre N sont donnés par la formule (8) mais seront, en pratique, calculés par une autre méthode dont le principe est le suivant:

Soit

$$h(z) := (z-z_0)^N f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+N}$$
$$= \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p-N} (z-z_0)^p .$$

La fonction h, somme d'une série entière, est holomorphe dans le disque $D(z_0, R)$, et le développement ci-dessus est sont développement de Taylor autour $z=z_0$. Donc:

$$a_{p-N} = \frac{h^{(p)}(z_0)}{p!}$$

On en déduit, en posant $p-N=n$,

$$(10) \quad a_n = \frac{1}{(n+N)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n+N}}{dz^{n+N}} \left\{ (z-z_0)^N f(z) \right\}$$

3) <u>Il existe un nombre ∞ de coeff^{t}-s $a_n \neq 0$, $n<0$</u>:

Le point $z=z_0$ est alors appelé un <u>point singulier essentiel</u> de f.

<u>Exemple:</u> La fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ n'est pas définie en $z=0$. Elle est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En remplaçant dans le développement de Taylor de e^u autour de $u=0$,

$$e^u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!},$$

u par $\frac{1}{z}$, on obtient:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{z^m m!} = \sum_{n\leq 0} \frac{z^n}{(-n)!}$$

qui est le développement en série de Laurent de $\exp(1/z)$ autour de $z=0$. Ce développment comporte une infinité de termes avec $n<0$; donc $z=0$ est un point singulier essentiel de la fonction $f(z) = \exp(1/z)$.

<u>En résumé:</u> Il existe deux types de singularités isolées: les pôles, et les points singuliers essentiels.

<u>Théorème des Résidus:</u>

<u>Définition:</u> On appelle <u>résidu de la fonction f au point $z=z_0$</u>, noté $\operatorname{res}(f, z_0)$, le nombre complexe égale au coeff^t a_{-1} du développement de Laurent de f dans un disque pointé de centre $z=z_0$.

Il est clair que <u>le résidu d'une fonction en un point régulier est nul</u>.

<u>Théorème:</u> Soit f holomorphe dans un ouvert simplement connexe V, excepté peut être en des points $z_1, \ldots, z_k$ de V. On a, pour tte courbe de Jordan $\Gamma \subset V$ ne rencontrant pas les z_j,

$$(11) \qquad \oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}(f, z_j)$$

<u>Démonstration:</u>



Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ des courbes de Jordan disjointes, intérieures à Γ, entourant les points $z_1, \dots, z_k$.

D'après le théorème de Cauchy généralisé, on a

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

Mais, si nous considérons le développement de Laurent de f autour du point z_j, donné par (8), et le coeff^t a_{-1} de ce développement, on a

$$\operatorname{res}(f, z_j) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz,$$

d'où la relation (11). ∎

Remarques:

1) Dans le cas d'un pôle d'ordre N, on utilisera la formule (10) avec $n=-1$:

$$a_{-1} = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \{(z-z_0) f(z)\}$$

En particulier, pour un pôle simple: $a_{-1} = \lim_{z\to z_0} \{(z-z_0) f(z)\}$.

Autrement, si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ a un pôle simple en $z=a$, i.e. $h(a)=0$, mais $g(a)\neq 0$ et $h'(a)\neq 0$, alors

$$\boxed{\operatorname{res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}}$$ (Voir Poly p. 55)

2) Pour un point singulier essentiel, on déterminera le développement de Laurent de f autour de ce point, et on retiendra la valeur du coeff^t a_{-1}.